Stockholms universitet
Institutionen för Data- och systemvetenskap
Johan Thorbiörnson

Tentamen i matematik
DISK, Diskret matematik 7,5 hp
Denna skrivning gäller delexamination 2 (3,5 hp). (Delexamination 2 (4 hp) examineras med hjälp av inlämningsuppgifter.) Resultat på denna skrivning ger betyg i 7-gradig skala A-F som också avgör slutbetyg på kursen.

Tisdag 11 januari 2011
Skrivtid: kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga. Ej miniräknare.

Lösningarna skall innehålla uträkningar och motiveringar samt presenteras på ett sådant sätt att resonemangen blir lätta att följa. Om du är tveksam om tolkningen av frågeställningen i någon uppgift, deklarera gärna i din lösning hur du själv tolkar frågan innan du löser den. Problemen på skrivningen är ej ordnade i någon svårighetsordning.

Obs: Antalet frågor på denna tentamen är 11 st, glöm inte att vända på tentabladet!

1. Betrakta två disjunkta (ej överlappande) mängder A och B där A består av 4 olika element $\{a, b, c, d\}$ och B består av 3 olika element $\{x, y, z\}$.
a) Vilket är det *sammanlagda antalet olika mängder* som går att skapa med element från de två mängderna A och B? (2p)
b) Hur många mängder kan man skapa av storlek 4 med element från A och B? (2p)
c) Hur många mängder kan man skapa av storlek 4 med element från A och B om minst ett element måste tillhöra B? (2p)

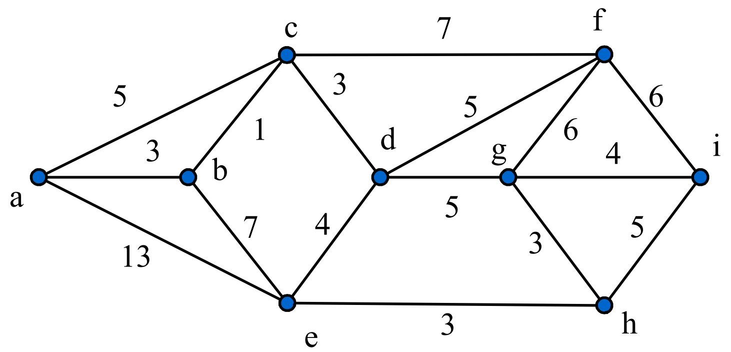
2. **a)** Låt en rekursionsformel vara definerad genom

$$a(0) = 3,\ a(1) = 2,\ a(n) = a(n-1) - 2 \cdot a(n-2) - n, \text{ om } n \geq 2$$

Beräkna värdena $a(2), a(3), a(4)$. (2p)
b) Hitta på en rekursionsformel som för varje heltal $n \geqslant 0$ genererar ett heltal $a(n)$ sådant att $a(n)$ är positivt för $n = 0$, 1 och 2, men negativt för alla resterande heltal $n \geqslant 3$. (2p)

3. Vilken veckodag är det om 3^{110111} dagar? (3p)

4. **a)** Bestäm genom att använda Dijkstras algoritm ett kortaste spår från a till i i den viktade grafen nedan. Din lösning ska innehålla hela den följd av etiketter som uppstår när hörnen mutas in i tur och ordning med hjälp av Dijkstras algoritm. Observera att det alltså inte räcker att som svar bara ange ett kortaste spår. (2p)



b) Bestäm med hjälp av Kruskals algoritm ett minimalt uppspännande träd för den viktade grafen i a). Som lösning ska du ange den följd av bågar och deras vikter som du väljer i tur och ordning när du utför Kruskals algoritm. Ange också den totala vikten för det minimala uppspännande trädet. (2p)

5. Låt M vara mängden $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108\}$. Definiera en relation R på M genom

$$xRy \quad \longleftrightarrow \quad y \text{ är jämnt delbart med } x$$

(här är x och y element i M). Rita upp ett Hasse-diagram som representerar R. (2p)

6. Låt M vara följande mängd av ord i svenska språket: M = {"*Våren*", "*är*", "*här*"}

a) Ge exempel på en ekvivalensrelation på M.

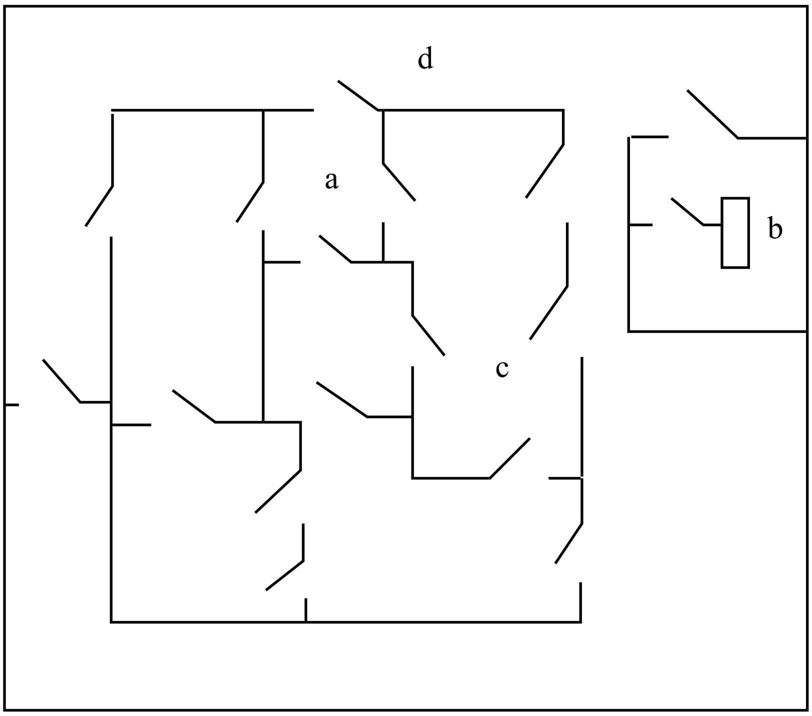
b) Ge exempel på en relation på M som inte är en ekvivalensrelation.

c) Hur många tänkbara relationer finns det totalt på M?

d) Hur många tänkbara ekvivalensrelationer finns det på M? (6p)

Motivera dina svar.

7. Nedanstående figur föreställer en översikt över rummen i en byggnad. Dörrar är markerade med öppningar. Vissa av rummen är markerade med bokstäver.



a) Rita en graf över den inbördes strukturen mellan rummen i byggnaden sådan att noderna i grafen representerar rummen och bågar representerar dörrar mellan rummen. (Du får rita direkt på skrivningsbladet om du vill och bifoga detta till dina lösningar.) (2p)

b) Är det möjligt att besöka rummen a, b, c och d i byggnaden så att varje dörr till dessa rum passeras exakt en gång, eventuellt genom att också använda andra dörrar och besöka andra rum? (Det är tillåtet att påbörja och avsluta promenaden i olika av dessa rum.) Motivera ditt svar med hjälp av något känt resultat om grafer. Om svaret är nej, konstruera en så liten förändring som möjligt av antalet dörrar i byggnaden så att varje dörr kan passeras exakt en gång. (Som möjlig förändring är igensättning av en befintlig dörröppning eller tillverkning av en ny dörröppning.) (2p)

8. **a)** Finns det någon sammanhängande graf som har 5 noder med hörngradtalen 2, 2, 2, 4, respektive 5? Motivera ditt svar.
b) Om en viss sammanhängande graf vet man att den är ett träd och att den har 3000 hörn. Bestäm antalet bågar i grafen eller förklara varför detta är omöjligt.
c) Vad kan man säga generellt om hörngradtalen för noderna i ett träd?
d) Ange (rita upp) två icke- isomorfa grafer med 6 bågar och 4 hörn.
e) Hur många icke-isomorfa grafer finns det som är ett träd och har 5 noder? (8p)

9. Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Kan man definiera Booleska operatorer (addition, multiplikation, etc) på denna mängd så att A blir en Boolesk algebra? Motivera ditt svar. (2p)

10. Låt $n \geq 1$ vara ett heltal och $P(n)$ beteckna påståendet

$$1^2 - 1 + 2^2 - 2 + \ldots + n^2 - n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}.$$

a) Vad blir påståendet $P(1)$?
b) Vad blir påståendet $P(n+1)$?
c) Visa att $\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}+(n+1)^2-(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$.

d) (*Du behöver inte ha löst a) – c) för att svara på denna delfråga och får anta att påståendena som behandlas i a) och c) är sanna.*) Visa med ett induktionsbevis att för alla heltal $n \geq 1$ så gäller att $P(n)$ är sant. (5p)

11. (Bonusfråga) Berätta något om ett valfritt område av matematiken som behandlas i kursen, dess resultat och tillämpningar. (3p)

Lycka till!