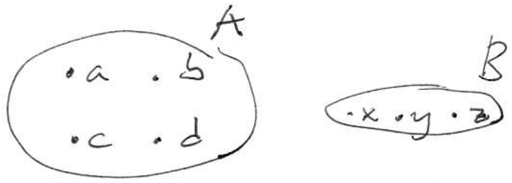
Svar och lösningsanvisningar till

Tentamen DISK, Diskret matematik 7,5hp

Delexamination 2 (3,5hp) 11 januari 2011

1.



a) $A \cup B$ har storlek 7, så antalet delmängder är $2^7 = 128$

b) $\binom{7}{4} = \dfrac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 35$ Svar: 35 delmängder

c) Välj först ett element i B, detta kan ske på 3 sätt. Återstående 3 element ska väljas ur de återstående 6 elementen, kan ske på $\binom{6}{3} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$ olika sätt. Multiplikationsprincipen ger $3\cdot 20 = 60$ mängder med storlek 4 med minst ett element ur B.

2. a)

$$a(2) = a(1) - 2 \cdot a(0) - 2$$
$$= 2 - 2 \cdot 3 - 2 = -6$$

$$a(3) = a(2) - 2 \cdot a(1) - 3$$
$$= -6 - 2 \cdot 2 - 3 = -13$$

$$a(4) = a(3) - 2 \cdot a(2) - 4$$
$$= -13 - 2 \cdot (-6) - 4$$
$$= -13 + 12 - 4 = -5$$

b) Det finns många olika sätt att konstruera en sådan rekursionsformel.

Ett exempel är

$$\begin{cases} a(0) = 4 \\ a(n) = a(n-1) - n \end{cases}$$

som ger $a(0) = 4$, $a(1) = a(0) - 1 = 3$,
$a(2) = a(1) - 2 = 1$, $a(3) = a(2) - 3 = -2$

Eftersom det är en avtagande följd kommer även alla kommande tal i följden att vara negativa.

Lösning 1

3. Vi räknar modulo 7: Potenslagar $(a^b)^c = a^{b\cdot c}$ ger

$$
\begin{aligned}
3^{110111} &\equiv 3\cdot(3^2)^{55055} \\
&\equiv 3\cdot 2^{55055} \quad (3^2 \equiv 2 \bmod 7) \\
&= 3\cdot(2^5)^{11011} \\
&\equiv 3\cdot 4^{11011} \quad (2^5 = 32 \equiv 4 \bmod 7) \\
&= 3\cdot 4\cdot 4^{11010} \\
&\equiv 5\cdot(4^2)^{5505} \quad (3\cdot 4 \equiv 5 \bmod 7) \\
&\equiv 5\cdot 2^{5505} \quad (4^2 \equiv 2 \bmod 7) \\
&= 5\cdot(2^5)^{1101} \\
&\equiv 5\cdot 4^{1101} \quad (2^5 \equiv 4 \bmod 7) \\
&= 5\cdot(4^3)^{367} = 5\cdot 64^{367} \\
&\equiv 5\cdot 1^{367} \quad (64 \equiv 1 \bmod 7) \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Svar: Om det är lördag idag så är det torsdag om 5 dagar.

3. lösning 2 (alternativ lösning)

Vi vet att $3^n \bmod 7$ blir en följd som upprepar sig cykliskt. Vi gör en tabell

n	3^n	$3^n \bmod 7$
1	3^1	3
2	3^2	$3 \cdot 3 \equiv 2$
3	3^3	$3 \cdot 2 = 6$
4	3^4	$3 \cdot 6 \equiv 4$
5	3^5	$3 \cdot 4 \equiv 5$
6	3^6	$3 \cdot 5 \equiv 1$
7	3^7	$3 \cdot 1 = 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Längden på perioden (cykeln) är alltså 6.
Vi får $110111 \div 6 = 18351$ rest 5, dvs $110111 = 6 \cdot 18351 + 5$. Det innebär att efter 3^{110111} steg har man passerat 18351 hela cykler och sedan kommit på steg 5 i nästa cykel. På steg 5 står det kongruens med talet 5, dvs samma svar som i lösning 1 ovan.

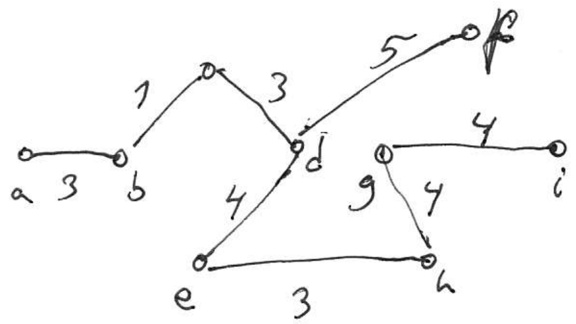
4. a) Man får följande etiketter i ordning:

b(3,a)
c(4,b)
d(7,c)
e(10,b)
f(11,c)
g(12,c)
h(13,e)
i(16,g)

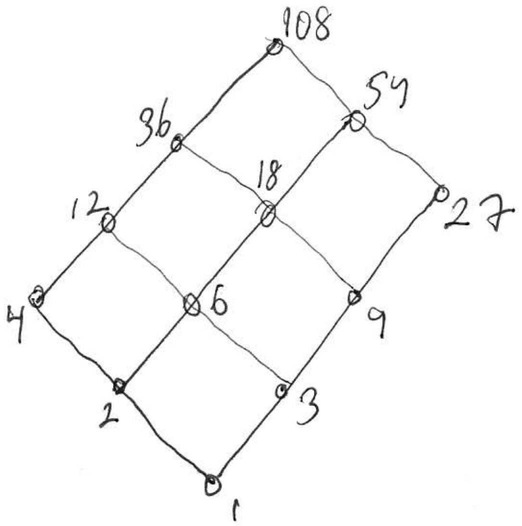
Ett kortaste spår har därför längd 16 och blir a, b, c, g, i.

b) Ett minimalt uppspännande träd har total vikt 26. Bågarna kan i Kruskals algoritm väljas i följande ordning:

(b,c) vikt 1
(a,b) vikt 3
(c,d) vikt 3
(e,h) vikt 3
(g,h) vikt 3
(g,i) vikt 4
(d,e) vikt 4)
(d,f) vikt 5



5.



6. a) Exempelvis $R = \{($"våren","våren"$), ($"är","är"$), ($"här","här"$)\}$

b) Exempelvis $R = \{($"våren","är"$)\}$

c) Varje relation kan representeras som en delmängd till $M \times M$. $M \times M$ har storlek $3 \cdot 3 = 9$ och alltså finns det $2^9 = 512$ olika delmängder till $M \times M$. Således finns det 512 olika relationer på M.

d) Enligt sats i boken så motsvarar varje ekvivalensrelation en partition av mängden M. Eftersom M består av 3 element så har vi följande möjligheter:

1) Partitionen av M utgörs av endast en delmängd, dvs hela M. Här finns endast 1 möjlighet ty $C(3,3) = 1$

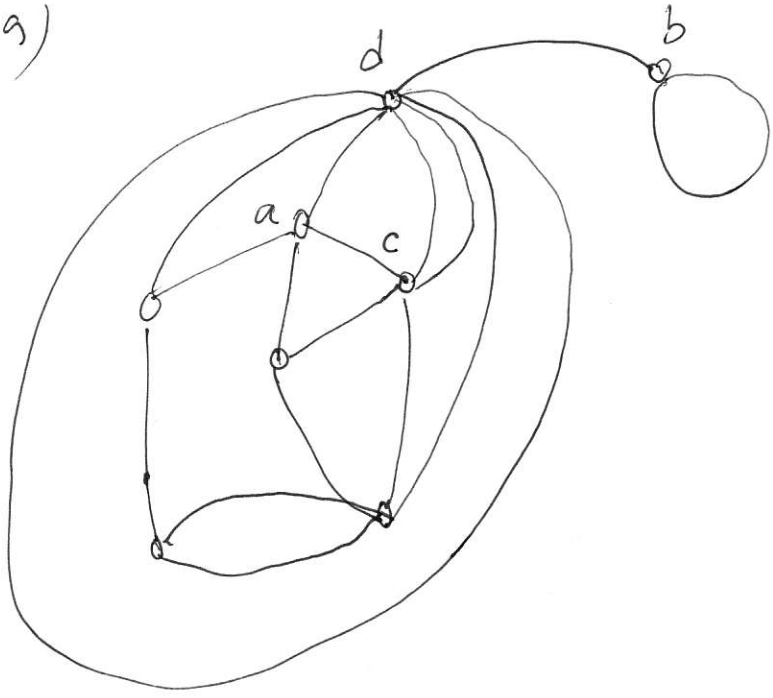
6. d) forts

2) Partitionen av M utgörs av två delmängder. Den ena delmängden måste ha storlek 1 och den andra ha storlek 2 (eftersom delmängderna är disjunkta i en partition). Här finns $C(3,1) = 3$ olika möjligheter.

3) Partitionen av M består av tre delmängder, alla av storlek 1. Också här finns endast 1 möjlighet.

Sammanlagt får vi alltså $1+3+1=5$ olika partitioner. Därför finns 5 tänkbara ~~partition~~ ekvivalensrelationer på M.

7. a)



b) Hörngradtalen för de angivna noderna är följande:

a : 4

b : 3

c : 5

d : 8

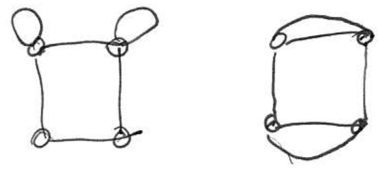
Eftersom det inte spelar roll hur många av dörrarna till de andra rummen som används, så följer av sats i boken om Euler-promenader att det finns en promenad enligt villkoren som börjar i ett av hörnen b eller c och slutar i det andra av b och c (exakt två hörn med udda hörngradtal).

8. a) Nej, summan av dessa hörngradtal är ett udda tal. Enligt sats i boken (Handshaking lemma) är summan av hörngradtalen i en graf alltid det dubbla antalet bågar (dvs ett jämnt tal).

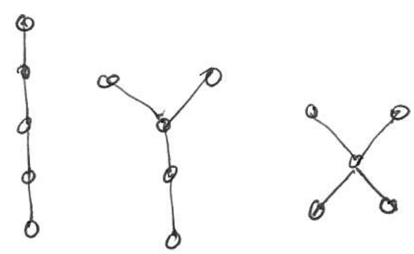
b) I ett träd är alltid antalet bågar 1 mindre än antalet noder (enligt sats i boken). Alltså är antalet bågar 2999.

c) Se ovan i b).

d) Exempelvis



e) Det finns tre träd:



Motivering: Eftersom det ska ingå 5 noder och därmed 4 bågar så är summan av hörngradtalen $2 \cdot 4 = 8$. Om hörngradtalen för hörnen ska summeras ihop ska alltså 8 skrivas som en summa av 5 termer,

8. e) forts.

varav (minst) två av termerna är 1 (i ett träd måste finnas minst en "rot" och en "topp").
Alltså kan problemet reduceras till att skriva talet 6 som en summa av 3 termer. Det finns följande möjligheter:

$1+1+4$
$1+2+3$
$2+2+2$

Det finns i dessa fall endast ett träd i var och ett av fallen som realiserar dessa kvarvarande tal (alltså $(1,1,1,1,4)$, $(1,1,1,2,3)$, $(1,1,2,2,2)$).

9. Nej, A har 5 element och en Boolesk algebra har alltid 2^n element (där n är ett positivt heltal).

10. a) $P(1)$ blir $1^2-1 = \dfrac{(1-1)\cdot 1\cdot(1+1)}{3}$

b) $P(n+1)$ blir $1^2-1+2^2-2+\dots+(n+1)^2-(n+1)$

$$= \frac{(n+1-1)\cdot(n+1)\cdot(n+1+1)}{3}$$

c) Vänsterledet blir

$$\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}+(n+1)^2-(n+1)$$

$$= \frac{n\cdot(n^2-1)}{3}+n^2+2n+1-n-1$$

$$= \frac{1}{3}(n^3-n)+n^2+n = \frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{2}{3}n$$

Högerledet blir

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1}{3}n(n^2+2n+n+2)$$

$$= \frac{1}{3}(n^3+3n^2+2n) = \frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{2}{3}n$$

Alltså gäller den sökta likheten.

10. d) Enligt Induktionsaxiomet gäller

$$\begin{cases} P(1) \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} P(n) \text{ är sant} \\ \text{för alla heltal } n \geq 1 \end{array}$$

P(1) är redan klart i a), ty vänsterledet där är 0 och likaså högerledet.
Vi behöver alltså visa $P(n) \to P(n+1)$.
Antag därför att P(n) är sant. Om vi adderar $(n+1)^2 - (n+1)$ till både vänster- och högerledet i P(n) så har vi fortfarande ett sant påstående. Vänsterledet i detta påstående är vänsterledet i P(n+1) och högerledet i detta påstående är enligt c) lika med $\dfrac{n \cdot (n+1)(n+2)}{3}$, d.v.s. högerledet i P(n+1). Alltså gäller P(n+1) om P(n) är sant. Enligt Induktionsaxiomet är P(n) sant för alla heltal $n \geq 1$.