Stockholms Universitet
Institutionen för Data och Systemvetenskap
Johan Andersson

Tentamen i Matematik
DISK, Diskret Matematik
2012-03-16

Lösningsförslag.

1. (a) Beräkna $\binom{7}{5}$. (1p)

Svar:

$$\binom{7}{5} = \frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}}{\cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 6}{2} = 7\cdot 3 = 21.$$

(b) Beräkna $|\{1,2,3,4\}\times\{2,3,4,5,6\}|$. (1p)

Svar:

$$|\{1,2,3,4\}\times\{2,3,4,5,6\}| = |\{1,2,3,4\}|\cdot|\{2,3,4,5,6\}| = 4\cdot 5 = 20.$$

(c) Skriv talet $(123)_4$ med basen 3. (2p)

Svar:

$$(123)_4 = 1\cdot 4^2 + 2\cdot 4 + 3 = 16 + 8 + 3 = 27 =$$
$$= 3^3 = 1\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 0\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 0\cdot 3^0 = (10000)_3.$$

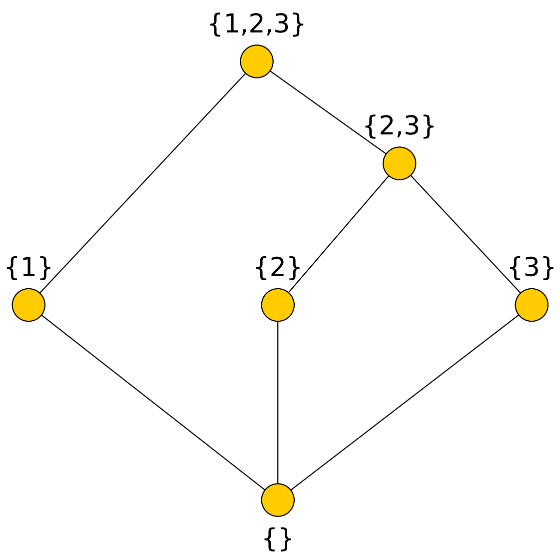
2. En förening med 7 medlemmar skall välja en styrelse med en ordförande och två ordinarie ledamöter. På hur många sätt kan detta göras? (2p)

Svar: Ordföranden kan väljas på 7 sätt. Sedan kan de ordinarie ledamöterna kan väljas på $\binom{6}{2}$ sätt. Enligt multiplikationsprincipen så blir antalet möjliga sätt

$$7\cdot\binom{6}{2} = 7\cdot\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 7\cdot 15 = 105 \text{ st.}$$

3. Relationen R definieras på $M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ genom aRb om och endast om $a \subseteq b$. Rita upp ett Hasse-diagram som representerar R. (2p)

Svar:



4. Bestäm

   (a) $\text{SGD}(10^{100}, 15^2 \cdot 7^{50})$, (2p)

   Svar: Genom att primtalsfaktorisera 10, 15 och använda potenslagarna så ser vi att $\text{SGD}(10^{100}, 15^2 \cdot 7^{50})$=$\text{SGD}(2^{100} \cdot 5^{100}, 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^{50})$. Det enda primtalet som förekommer i båda talen är 5 och den lägsta potens som förekommer är 5^2. Detta ger att $\text{SGD}(10^{100}, 15^2 \cdot 7^{50}) = 5^2 = 25$.

   (b) $\text{SGD}(713, 589)$. (2p)

   Svar: Vi använder Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 713 &= 589 + 124, \\ 589 &= 4 \cdot 124 + 93, \\ 124 &= 93 + 31, \\ 93 &= 3 \cdot 31 + 0. \end{aligned}$$

   Den största gemensamma delaren blir den sista ickeförsvinnande resten, dvs $\text{SGD}(713, 589)$=31.

5. Bestäm sista siffran i talet $3^{21} + 4^{10}$. (3p)

   Svar: För att bestämma sista siffran så räknar vi modulo 10. Vi har från potenslagarna att

$$3^{21} = 3 \cdot 3^{20} = 3 \cdot 3^{4 \cdot 5} = 3 \cdot (3^4)^5 = 3 \cdot 81^5.$$

   Detta ger oss att

$$3^{21} = 3 \cdot 81^5 \equiv 3 \cdot 1^5 \equiv 3 \pmod{10}.$$

   Vi har också enligt potenslagarna att

$$4^{10} = 4^{2 \cdot 5} = (4^2)^5 = 16^5.$$

   Eftersom $6 \cdot 6 = 36 \equiv 6 \pmod{10}$ så får vi att $6^n \equiv 6 \pmod{10}$ för alla $n \geq 1$. Speciellt så får vi att

$$4^{10} = 16^5 \equiv 6^5 \equiv 6 \pmod{10}.$$

   Vi får att

$$3^{21} + 4^{10} \equiv 3 + 6 \equiv 9 \pmod{10}.$$

   Sista siffran blir alltså 9.

6. Bevisa att $n^3 + 5n$ är delbart med 3 för alla positiva heltal n. (3p)

   Svar: Att bevisa att $n^3 + 5n$ är delbart med 3 är detsamma som att visa att

$$n^3 + 5n \equiv 0 \pmod{3}.$$

   Om n är ett heltal så tillhör n en av tre möjliga kongruensklasser modulo 3. Det räcker att visa påståendet för alla de tre möjliga fallen för vilka vi får

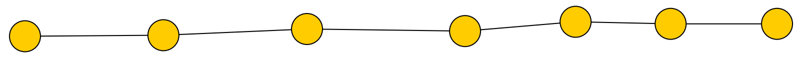
   (a) $n \equiv 0 \pmod{3}$. Vi har att $n^3 + 5n \equiv 0^3 + 5 \cdot 0 = 0 \pmod{3}$. OK!
   (b) $n \equiv 1 \pmod{3}$. Vi har att $n^3 + 5n \equiv 1^3 + 5 \cdot 1 = 6 \equiv 0 \pmod{3}$. OK!
   (c) $n \equiv 2 \pmod{3}$. Vi har att $n^3 + 5n \equiv 2^3 + 5 \cdot 2 = 18 \equiv 0 \pmod{3}$. OK!

   Vi har visat påståendet för alla heltal, speciellt för alla positiva heltal.

   Anmärkning. Det går även bra att bevisa påståendet med induktionsbevis.

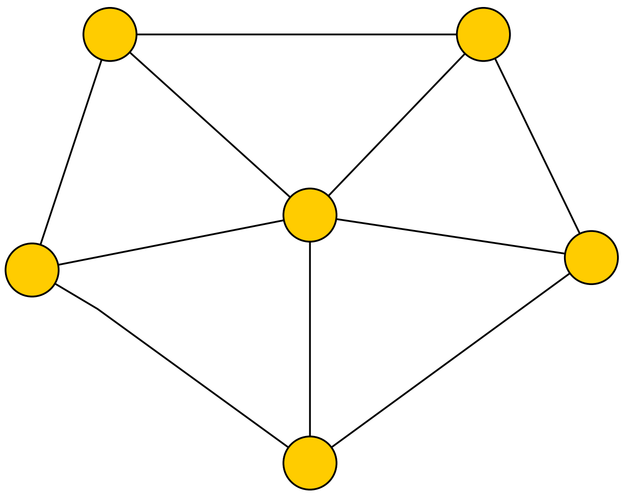
7. (a) Ge ett exempel på ett träd med 7 noder. (1p)

Svar:



(b) Ge ett exempel på en öglefri enkel[1] sammanhängande graf med 6 noder och 10 bågar som inte innehåller ett Eulerspår (Fullständig motivering varför grafen inte innehåller ett Eulerspår erfordras.). (2p)

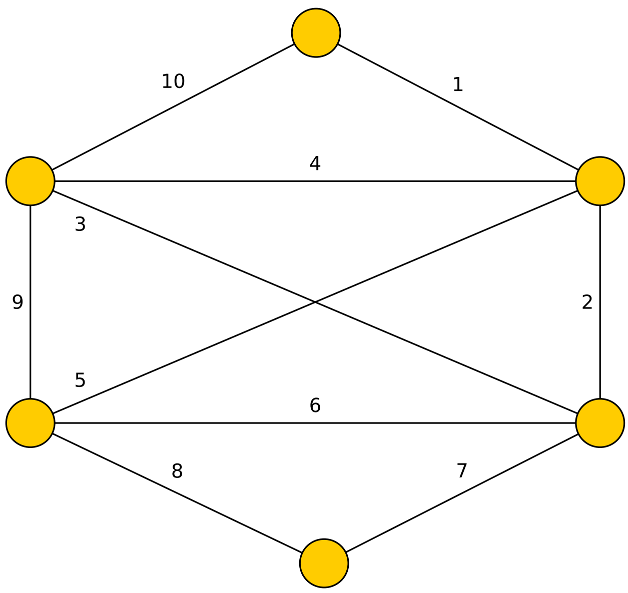
Svar:



Enligt sats så innehåller en graf ett Eulerspår om och endast om högst två noder har udda hörngradtal. I grafen ovan har alla 6 noder udda hörngradtal och alltså innehåller grafen inget Eulerspår.

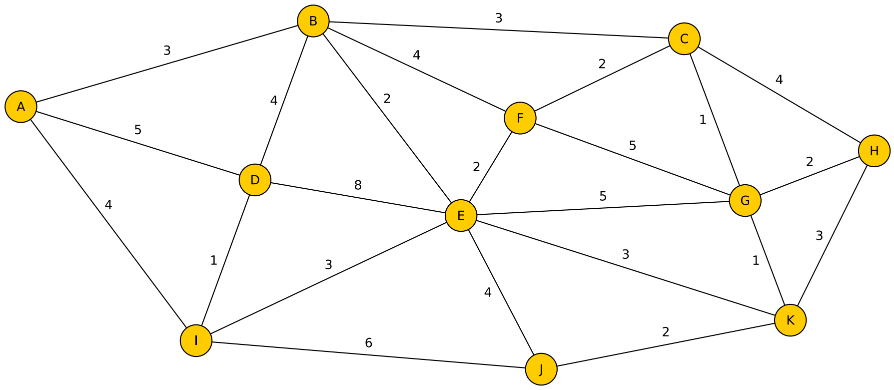
(c) Ge ett exempel på en öglefri enkel graf med 6 noder och 10 bågar som innehåller en Eulerkrets, samt hitta Eulerkretsen. (2p)

Svar:



[1] Ledning: En enkel graf är en graf som inte är en multigraf.

8. Bestäm ett minimalt uppspännande träd i nedanstående graf. Tala om vilken algoritm du använder och i vilken ordning du väljer kanterna. (3p)

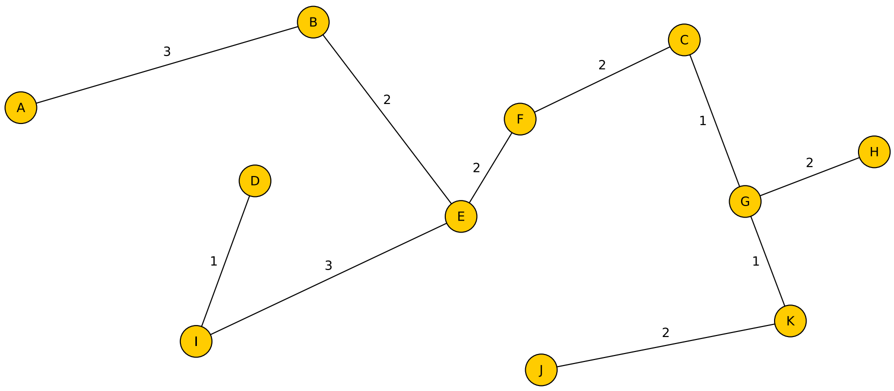


Svar: Vi kan använda oss av Prims eller Kruskals algoritm. Vi väljer Kruskals algoritm. Den går ut på att välja kanterna med lägst vikt, där vi i varje steg ser till att vi inte får en cykel tills vi har ett uppspännande träd.

(a) Först väljer vi bågar av vikt 1. Vi kan välja CG,DI,GK.

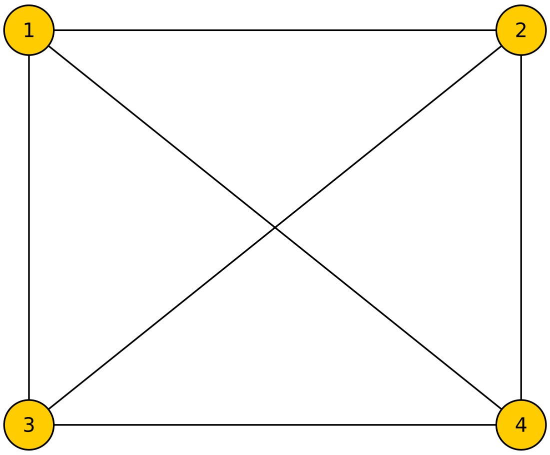
(b) Sedan väljer vi bågar av vikt 2. Vi väljer BD,EF,FC,GH,KJ. Vi har nu använt alla bågar av vikt 1 och vikt 2 och vi har inte fått någon cykel.

(c) Sedan väljer vi bågar av vikt 3. Nu måste vi vara försiktiga så att vi inte får en cykel. Vi kan inte välja HK, CB, eller KE. Däremot så kan vi välja AB, och IE. Vi har nu följande minimalt uppspännande träd med vikt $3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 3 + 10 + 6 = 19$:



Anmärkning: I denna graf finns det ett unikt minimalt uppspännande träd.

9. Bestäm en förbindelsematris A för grafen



(1p)

Svar:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrismultiplikation ger att

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Beskriv hur matrismultiplikationen ger elementet på plats $(2, 3)$ (2:a raden, 3:e kolonnen) i matrisen A^2. (1p)

Svar: Talet på plats $(2, 3)$ fås genom att att addera produkten av j:e elementet i 2:a raden och j:e elementet i 3:e kolonnen över $j = 1, 2, 3, 4$. I vårat fall så får vi

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 + 0 + 0 + 1 = 2.$$

(b) Beskriv vad talet på plats (i, j) i matrisen A^n (om $n \geq 1$ är ett heltal) betyder i termer av promenader i grafen. (1p)

Svar: Talet på plats (i, j) i matrisen A^n är antalet promenader från nod i till nod j av längd n.

(c) Vilka promenader i grafen motsvarar siffrorna som står på plats $(2, 3)$ respektive (3,3) i matrisen A^2 ? (2p)

Svar: Siffran 2 på plats $(2, 3)$ står för promenaderna $2 \to 4 \to 3$ och $2 \to 1 \to 3$. Siffran 3 på plats $(3, 3)$ står för promenaderna $3 \to 1 \to 3$, $3 \to 2 \to 3$ och $3 \to 4 \to 3$.

(d) Förklara varför det skall stå samma tal på plats $(3, 4)$ och plats $(1, 3)$ i matrisen A^n om $n \geq 1$. (2p)

Svar: Korrespondensen där vi numrerar om noderna enligt $3 \to 1$, $4 \to 3$, $1 \to 2$, $2 \to 4$ är en isomorfi (detta motsvarar precis att vi roterar grafen $90°$). Eftersom den är isomorfi så är antalet promenader mellan nod 3 och nod 4 av längd n lika många som antalet promenader mellan nod 1 och nod 3 av längd n. Eftersom talet på plats $(3, 1)$ och $(3, 4)$ i matrisen A^n räknar dessa promenader så är även de talen desamma.

10. Bestäm hur många ekvivalensrelationer det finns på mängden $\{1,2,3,4,5,6\}$ där varje ekvivalensklass består av två element. (3p)

Svar: Eftersom varje ekvivalensklass innehåller två element så är varje element i mängden i relation med exakt ett annat element. Talet 1 skall speciellt vara i relation med ett annat element. Detta element kan vi välja på 5 st sätt. Vi har nu 4 element kvar. Det minsta av dessa element skall vara i relation med ett av de återstående elementen. Detta kan väljas på 3 sätt. De återstående två elementen måste nu vara i den återstående ekvivalensklassen och ekvivalensrelationen är nu entydigt bestämd. I första valet hade vi 5 möjligheter och i andra valet 3 möjligheter. Enligt multiplikationsprincipen så har vi $5 \cdot 3 = 15$ ekvivalensrelationer där varje ekvivalensklass har två element.

Alternativ lösning: En ekvivalensrelation motsvarar precis en partition av mängden, och en ekvivalensrelation där varje ekvivalensklass består av två element motsvarar en partition av mängden där mängderna i partitionen består av 2 element. Den första mängden kan väljas på $\binom{6}{2}$ sätt, nästa på $\binom{4}{2}$ sätt och den tredje på $\binom{2}{2}$ sätt. Enligt multiplikationsprincipen så kan en ordnad trippel av disjunkta mängder med två element från mängden $\{1,2,3,4,5,6\}$ väljas på

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 1 = 15 \cdot 6.$$

Eftersom varje permutation av den ordnade trippeln av delmängder motsvarar samma partition av mängden $\{1,2,3,4,5,6\}$ så måste vi dela med $3! = 6$ för att få antalet partitioner där varje mängd har två element. Vi får

$$\frac{15 \cdot 6}{6} = 15$$

partitioner och alltså även 15 ekvivalensrelationer där varje ekvivalensklass har två element.