Stockholms Universitet
Institutionen för Data och Systemvetenskap
Johan Andersson

Diskret Matematik
Vårterminen 2012
2012-03-05

Inlämningsuppgifter - restuppgifter - Omgång 3

Inlämningsuppgifterna skall lösas individuellt, samt lämnas in i samband med första tentan i Mars (+ max 3 dagar, dvs Måndagen den 19:e Mars 2012), eller andra tentan i Maj (Dvs senast den 5:e Maj 2012).

Satsa på att lämna in inlämningsuppgiften redan i Mars även om ni inte klarat alla uppgifter. Jag kommer den här gången att indikera om det skriftliga är tillräckligt för att gå vidare till en muntlig examination/presentation, och om ni inte har gjort tillräckligt kommer jag att tala om vad ni behöver förbättra (Vilka uppgifter som blev fel), så får ni en ny chans i Maj.

Ni skall vara beredda på att presentera lösningarna på uppgifterna i smågrupper.

1. Definiera a_n rekursivt genom $a_0 = 1$ samt $a_n = 2a_{n-1} + 3$ för $n \geq 1$. Bevisa med induktion att $a_n = 2^{n+2} - 3$ för alla naturliga tal n.

2. Definiera a_n rekursivt genom $a_0 = 0, a_1 = 1$ samt $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + n - 1$ för $n \geq 2$. Bevisa med induktion att $a_n = n$ för alla naturliga tal n.

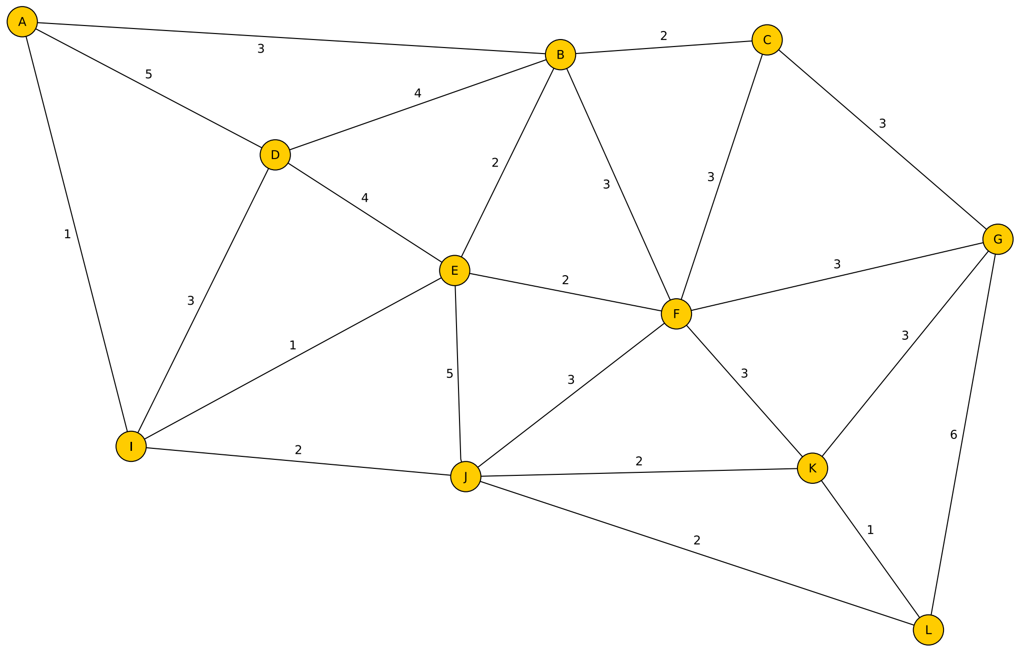
3. Låt R vara en relation definierad på mängden $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ genom $(a,b)R(c,d)$ omm $a < c$ eller $a = c$ och $b \leq d$.
   (a) Visa att R är en partiell ordning.
   (b) Rita ett Hasse-diagram för den partiella ordningen.

4. Låt $D_{20} = \{1,2,4,5,10,20\}$ och låt R vara definierad som aRb omm $a|b$.
   (a) Rita upp Hasse-diagrammet för den partiella ordningen.
   (b) Beskriver Hasse-diagrammet en Boolesk algebra?

5. Rita upp representanter för alla isomorfiklasser av enkla grafer med 1,2,3 samt 4 noder.

6. Ge exempel på 7 st enkla sammanhängande ickeisomorfa grafer med 5 noder.

7. Den viktade grafen G ges av följande figur



(a) Använd Dijkstra’s algoritm för att bestämma kortaste vägen mellan hörn G och hörn A. Var noggrann och skriv en etikett vid kanterna så att stegen i algoritmen kan följas.

(b) Avgör hur långt avståndet är mellan G och D.

(c) Använd Prims algoritm för att hitta ett maximalt uppspännande träd. Ange vilken ordning du valt kanterna.

(d) Använd Kruskals algoritm för att hitta ett maximalt uppspännande träd. Ange vilken ordning du valt kanterna.

8. Visa att grafen i uppgift 7 inte har en Eulerkrets, samt bestäm det minsta antalet extra kanter som behövs i grafen för att grafen skall innehålla en Eulerkrets. Rita dit de extra kanterna, samt bestäm en Eulerkrets i den nya grafen med de extra kanterna.

9. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Rita upp en graf G som har förbindelsematrisen A.

(b) Beräkna matrisen A^2, antingen genom att använda matrismultiplikation eller teorin för promenader i grafer.

(c) Det är möjligt att visa att

$$A^4 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

På plats $(1,3)$ (1:a raden, 3:a kolonnen) samt på plats $(5,2)$ (femte raden, 2:a kolonnen) i matrisen finns siffan 4. Tolka de siffrorna i termer av promenader i grafen. Vilka promenader i grafen motsvarar de siffrorna?

(d) I allmänhet ser det ut som att siffran på plats $(5,2)$ i matrisen A^n och siffran på plats $(1,3)$ är densamma. Bevisa det resultatet genom att använda teorin för promenader i grafer. ($n \geq 1$ heltal)

(e) I matrisen A^4 ser vi att diagonalelementen alla är desamma (=6). Gäller motsvarande resultat för A^n, dvs är diagonalelementen desamma? ($n \geq 1$ heltal)