Stockholms Universitet
Institutionen för Data och Systemvetenskap
Johan Andersson

Diskret Matematik
Vårterminen 2012
2012-02-22

Inlämningsuppgifter - Omgång 3

Inlämningsuppgifterna skall lösas *individuellt* samt lämnas senast Onsdagen den 29:e Februari (antingen i samband med föreläsningen, alternativt om ni vill skriva på datorn eller scanna in lösningar, mejlas in till `jander@dsv.su.se`, senast midnatt natten mot Torsdagen. Fullständiga lösningar skall lämnas in. Ni skall vara beredda att presentera era lösningar på en muntlig gruppexamination påföljande Fredag och Måndag. Exakt Gruppindelning kommer att meddelas senare.

1. Definiera a_n rekursivt genom $a_0 = 2$ samt $a_n = 3a_{n-1} - 2$ för $n \geq 1$. Bevisa att $a_n = 3^n + 1$ för alla naturliga tal n.

2. Från divisionsalgoritmen för division med 2 så följer det att $n = 2q + r$ för något heltal q och $r = 0$ eller $r = 1$. En algoritm för att beräkna $b \cdot a^n \pmod{m}$ bygger på att använda kongruenserna

$$b \cdot a^n \equiv d \cdot c^q \pmod{m}$$

där $c \equiv a^2 \pmod{m}$, $d \equiv ba^r \pmod{m}$ och $0 \leq c, d < m$ rekursivt samt att använda faktumen att $a^1 = a$, samt $a^0 = 1$.

   (a) Beräkna $7^{37} \pmod{13}$ genom att använda algoritmen ovan (Redovisa varje steg noggrant).

   (b) Vad är tidskomplexiteten av algoritmen ovan om n är ett k-bitars tal (k binära siffror)? (a, b och m är fixa tal, men n kan variera.)

3. Låt R vara en relation definierad på mängden $\{1, 2, 3, 5, 6, 9, 15, 30\}$ så att aRb om $a|b$.

   (a) Visa att R är en partiell ordning

   (b) Rita ett Hasse-diagram för den partiella ordningen

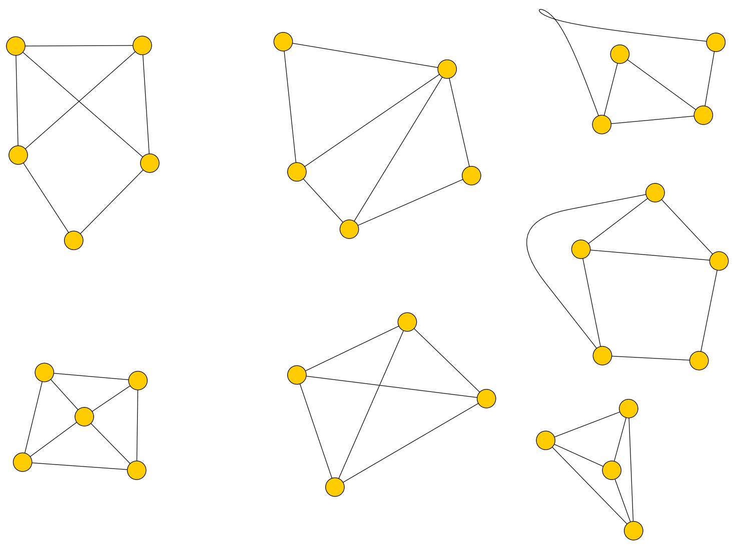
4. Låt $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ och låt R vara definierad som aRb omm $a|b$.

   (a) Rita upp Hasse-diagrammet för den partiella ordningen

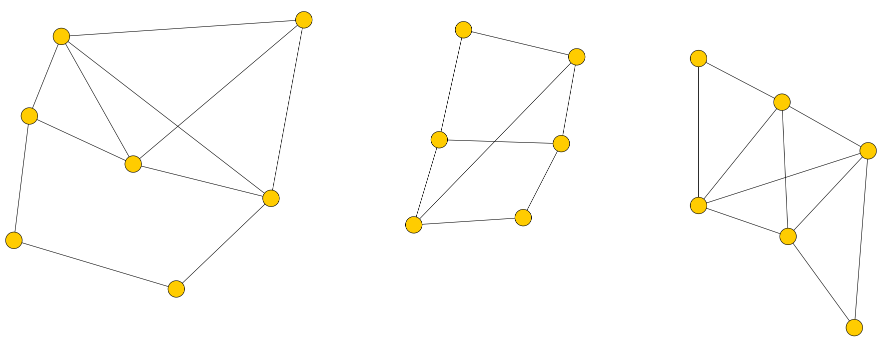
   (b) Bevisa att D_6 är en Boolesk algebra där de Booleska operationerna $*, +$ definieras som $a*b = SGD(a, b)$, $a+b = MGM(a, b)$, komplementet av a definieras som $a' = 6/a$ samt 0-an samt 1-an i den Booleska algebran ges av elementen 1 och 6 i D_6. Ett sätt är att verifiera axiomen för en Boolesk algebra. Ett annat sätt är att hitta en isomorfi till en känd Boolesk algebra med 4 element (Exempelvis så kan ni använda B_2 som definieras i Exempel 7.2 i kursboken). En isomorfi mellan två Booleska algebror $(B, +_B, *_B, {}'_B, 0_B, 1_B)$ och $(A, +_A, *_A, {}'_A, 0_A, 1_A)$,är en en-entydig korrespondens mellan elementen i de Booelska algebrorna som skickar ettor på ettor, nollor på nollor, och respekterar addition, multiplikation och komplement. Detta innebär mer exakt att om $\phi : A \to B$ är en funktion som ger den en-entydiga korrespondensen, så skall $\phi(1_A) = 1_B$, $\phi(0_A) = 0_B$, $\phi(a +_A b) = \phi(a) +_B \phi(b)$, $\phi(a *_A b) = \phi(a) *_B \phi(b)$, samt $\phi(a^{'_A}) = \phi(a)^{'_B}$.

5. Rita upp representanter för alla isomorfiklasser av träd med 1,2,3,4 samt 5 noder.

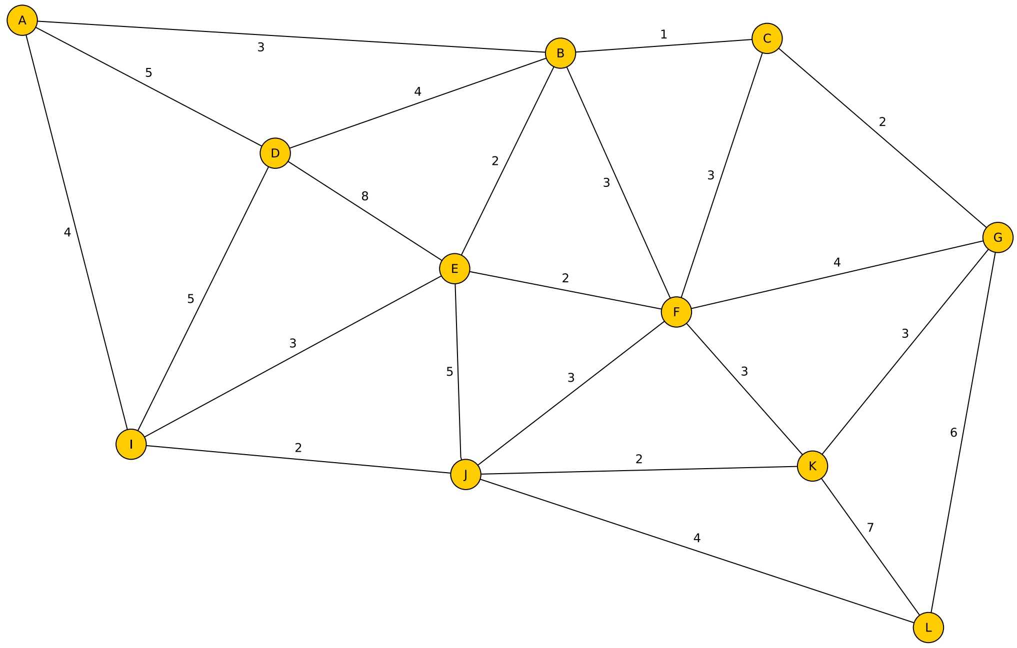
6. Vilka av följande grafer är isomorfa (indela graferna i isomorfiklasser (ekvivalensklasser under ekvivalensrelationen isomorfi))?



7. Avgör vilka av följande grafer som innehåller Eulerspår respektive Eulerkretsar.



8. Den viktade grafen G ges av följande figur



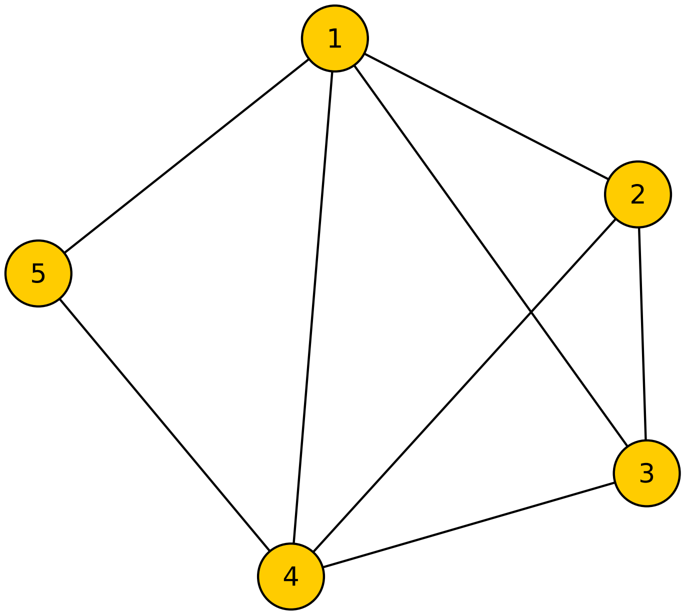
(a) Använd Dijkstra's algoritm för att bestämma kortaste avståndet mellan hörn A och hörn L. Var noggrann och skriv en etikett vid kanterna så att stegen i algoritmen kan följas.

(b) Avgör hur långt avståndet är mellan A och J

(c) Använd Prims algoritm för att hitta ett minimalt uppspännande träd. Ange vilken ordning du valt kanterna.

(d) Använd Kruskals algoritm för att hitta ett minimalt uppspännande träd. Ange vilken ordning du valt kanterna.

9. Grafen G ges av följande figur.



(a) Bestäm Förbindelsematrisen A till grafen.

(b) Det är möjligt att visa att

$$A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 9 & 7 \\ 9 & 6 & 7 & 9 & 4 \\ 9 & 7 & 6 & 9 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 8 & 7 \\ 7 & 4 & 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

.

i. Siffran 2 förekommer på ett ställe i matrisen. Hur kan siffran 2 tolkas i termer av promenader i grafen G. Vilka promenader motsvarar den siffran?

ii. Siffran 4 förekomer på 4 ställen i matrisen. Tolka varje fyra i termer av promenader i grafen G. Vilka promenader motsvarar fyran?

(c) Utan att faktiskt beräkna matrisen A^4 (eller använda matrisen som vi beräknat ovan för A^3), använd teorin för promenader i grafer för att ange vilken siffra som skall stå i matrisen A^4 på den platsen i matrisen som finns i både femte raden och femte kolonnen.