Stockholms Universitet
Institutionen för Data och Systemvetenskap
Johan Andersson

Diskret Matematik
Vårterminen 2012
2012-03-07

Lösningsförslag inlämningsuppgifter omgång 1

Mängdlära

1. Beräkna

   (a) $|\{1, 3, 4, 1\}|$,
   Svar: $|\{1, 3, 4, 1\}| = |\{1, 3, 4\}| = 3$.

   (b) $|\{1, 3, 4\}|$,
   Svar: $|\{1, 3, 4\}| = 3$.

   (c) $|\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 5, 11\})|$,
   Svar: $|\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 5, 11\}) = 2^{|\{1,2,3,5,11\}|} = 2^5 = 32$.

   (d) $|\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\} \times \{7, 8\}|$.
   Svar: $|\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\} \times \{7, 8\}| = |\{1, 2, 3\}| \cdot |\{4, 5, 6\}| \cdot |\{7, 8\}| = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

2. Låt M vara en mängd. Förenkla $M \cap M^c$.

   Svar: Eftersom ett element inte både kan finnas i en mängd M samt inte finnas i samma mängd M blir mängden av sådana element tom. Svaret blir alltså tomma mängden $\emptyset$.

3. Låt $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, $A = (3, \infty)$, $B = \{-1, 1, 3, 5\}$ och $C = \mathbb{R}^+$.
   Bestäm $(A \cup B^c)^c \cap C$.

   Svar: Från De Morgan får vi att $(A \cup B^c)^c = A^c \cap B$. Eftersom $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ och $A = (3, \infty)$ så får vi att $A^c = (-\infty, 3]$. Alltså

$$(A \cup B^c)^c \cap C = (-\infty, 3] \cap \{-1, 1, 3, 5\} \cap \mathbb{R}^+ = \{1, 3\}.$$

4. Låt $A = \{1, \emptyset\}$ och $B = \{2, 3, 4\}$.

   (a) Ange alla element i mängden $A \times B$.
   Svar: $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (\emptyset, 2), (\emptyset, 3)$ och $(\emptyset, 4)$.

   (b) Ange alla element i mängden $\mathcal{P}(B)$.
   Svar: $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ och $\{2, 3, 4\}\cdot$

5. Det är givet att $= \{(1, 2), (3, 4)\} \subseteq A \times B$. Ange två element i mängden A, samt två element i mängden B.

   Svar: Eftersom $A \times B$ består av element (x, y) där $x \in A$ och $y \in B$ så är det klart att förstaelementen i talparen tillhör A, dvs $1 \in A$ och $3 \in A$, samt att andraelementen i talparen tillhör B, dvs $2 \in B$ och $4 \in B$. (Däremot följer det inte att till exempel $A = \{1, 3\}$, dock att $\{1, 3\} \subseteq A$.)

6. Bevisa den distributiva lagen $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Detta kan till exempel göras med Venn-diagram eller mängdmedlemskapstabeller.

   Svar: Vi använder oss av mängdmedlemskapstabell

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

En etta i kolumnen betyder här att x tillhör den givna mängden, och en nolla att x inte tillhör den givna mängden. Den distributiva lagen följer ifrån att den femte och åttonde kolumnen (från rad 2) är lika.

Kombinatorik

1. En förening bestående av 15 medlemmar skall välja en Styrelse bestående av en ordförande, en sekreterare och en kassör. På hur många olika sett kan det göras.

   Svar: Enligt multiplikationsprincipen så kan detta göras på $15 \cdot 14 \cdot 13 =$ sätt. (Detta kan även ses som antalet ordnade delmängder med 3 element av en mängd med 15 element, dvs $P(15,3) = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$.)

2. Hur många tolvstaviga ord kan man bilda genom att använda bokstäverna i ordet KOMBINATORIK?

   Svar: Detta kan göras på $\dfrac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \dfrac{12!}{8}$ olika sätt. Detta kan ses på (minst) två sätt.

   (a) Sätt 1. Vi har tre bokstäver som förekommer två gångar, K,I och O. Om vi byter namn på bokstäverna till O_1, O_2, K_1, K_2 och I_1, I_2 så har vi 12 olika bokstäver och 12! ord. Eftersom om vi byter plats på O_1 och O_2 så får vi samma ord måste vi dela med 2!, och detsamma för K och I, dvs vi måste dela 12! med $2! \cdot 2! \cdot 2! = 8$.

   (b) Sätt 2. Vi har 2 st O'n, 2 st K'n och 2 st I'n. Vi har 12 positioner för bokstäverna. Positionerna för O'na kan väljas på $\binom{12}{2}$ sätt, postionerna för K'na på $\binom{10}{2}$ sätt (2 platser bland de återstående 10) och därefter positionerna för I'na på $\binom{8}{2}$ sätt. Vi har 6 bokstäver kvar, och de återstående positionerna kan väljas på 6! sätt. Enligt multiplikationsprincipen så får vi $\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot 6! = \frac{12!}{2!10!} \frac{10!}{2!8!} \frac{8!}{6!2!} 6! = \frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ eftersom de andra faktorerna kan förkortas bort.

3. En klass med 12 studenter skall delas in i fyra grupper med tre studenter i varje grupp. På hur många sätt kan detta göras?

   Svar: Denna fråga har olika svar beroende på om grupperna skall vara numrerade eller inte. Om vi antar att vi har numrerade grupper så kan detta göras på $\dfrac{12!}{3!^4} = 369600$ olika sätt. Om de skall vara onumrerade blir antalet sätt $\dfrac{12!}{3!^4 \cdot 4!} = 15400$.

4. Hur många icke-negativa heltalslösningar har ekvationen $a+b+c+d+e = 15$?

   Svar: Vi tänker oss att vi skall placera ut 4 st plustecken (eller mellanväggar) och 15 st ettor på 19 $(= 4 + 15)$ st platser. Detta kan göras på $\dbinom{19}{4} =$

$\frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3876$ olika sätt.

5. I den här uppgiften tänk på att ett tal kan inte börja med en nolla.

   (a) Hur många fyrsiffriga tal finns det?

   Svar: Första siffran (tusentalssiffran) kan vi välja på 9 sätt (alla siffror utom 0). De andra på 10 sätt. Enligt multiplikationsprincipen så finns det $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ sådana tal.

   (b) Hur många fyrsiffriga tal finns det som inte innehåller siffran 9?

   Svar: Första siffran (tusentalssiffran) kan vi välja på 8 sätt (alla siffror utom 0 och 9). De andra på 9 (alla sifror utom 9) sätt. Enligt multiplikationsprincipen så finns det $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ sådana tal.

   (c) Hur många fyrsiffriga tal finns det som har olika siffror och inte innehåller siffran 9?

   Svar: Vi väljer tusentalssiffran (kan göras på 8 sätt, alla siffor utom 0 och 9), hundratalssiffran (kan göras på 8 sätt, alla utom 9 och tusentalssiffran), tiotalssiffran (kan göras på 7 sätt, alla utom 9, tusentalssiffran och hundratalssiffran) och entalssiffran (kan göras på 6 sätt, alla utom 9, tusentalssiffran, hundratalssiffran och tiotalssiffran) i ordning. Enligt multiplikationsprincipen så finns det $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$ sådana tal.

   (d) Hur många av talen $1, \ldots, 10000$ har olika siffror?

   Svar: Vi delar in talen i ensiffriga, tvåsiffriga, tresiffriga, respektive fyrsiffriga tal och får enligt additions och multiplikationsprincipen $9+9 \cdot 9+9 \cdot 9 \cdot 8+9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5274$. (Antalet ettsiffriga, tvåsiffriga, tresiffriga, respektive fyrsiffriga fås ifrån samm princip som (c) uppgiften, men eftersom siffran 9 också får väljas blir antalet val för varje siffra 1 mer).

   (e) Hur många av talen $1, \ldots, 10000$ är delbara med 5, har olika siffror och innehåller inte siffran 9?

   Svar: Först noterar vi att tal som är delbara med 5 slutar antingen med en nolla eller en femma. Vi noterar även att 10000 inte har olika siffror och alltså skall vi räkna antalet tal som uppfyller villkoren i uppgiften mellan 1 och 9999, dvs ensiffriga, tvåsiffriga, tresiffriga och fyrsiffriga tal. Vi delar in i två fall.

      i. Fall 1. (slutar på 0-a)

         A. Ensiffriga: 0 st.

         B. tvåsiffriga: 8 st (Tiotalssiffran kan väljas på 8 sätt (alla utom $0, 9$).

         C. tresiffriga: Enligt multiplikationsprincipen $8 \cdot 7 = 56$ st (Först väljer vi hundratalssiffran, sedan tiotalssiffran)

         D. fyrsiffriga: Enligt multiplikationsprincipen $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ st (Först väljer vi tusentalssiffran, sedan hundratalssiffran, sedan tiotalssiffran)

      Enligt additionsprincipen så blir antalet siffror mellan 1 och 9999 som är slutar med en nolla och har olika siffror $0+8+56+336 = 400$ st.

      ii. Fall 2. (slutar på 5-a)

         A. Ensiffriga: 1'st

         B. tvåsiffriga: 7 st (Tiotalssiffran kan väljas på 7 sätt (alla utom $0, 5, 9$).

         C. tresiffriga: Enligt multiplikationsprincipen $7 \cdot 7 = 49$ st (Först väljer vi hundratalssiffran, sedan tiotalssiffran)

D. fyrsiffriga: Enligt multiplikationsprincipen $7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$ st (Först väljer vi tusentalssiffran, sedan hundratalssiffran, sedan tiotalssiffran)

Enligt additionsprincipen så blir antalet siffror mellan 1 och 9999 som är slutar med en femma och har olika siffror $1+7+49+294 = 351$ st.

Sammanlagda antalet heltal mellan 1 och 10000 som uppfyller villkoren i uppgiften är enligt additionsprincipen $400 + 351 = 751$ st.

6. Hur många positiva heltal mindre än 200 finns det som inte är delbara med $3, 7$ eller 11?

Svar. Låt A, B, C vara mängden av tal mellan 1 och 199 som är delbara med 3, 7, respektive 11. Det är klart att $|A \cup B \cup C|$ räknar antalet tal mellan 1 och 199 som är delbara med 3 eller 7 eller 11. Eftersom vi vill räkna antalet tal som inte är delbara med $3, 7$ eller 11 vill vi beräkna $199 - |A \cup B \cup C|$. Vi använder oss av sållningsprincipen eller inklusions-eklusionsprincipen.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \tag{*}$$

$A \cap B$ är nu mängden tal mellan 1 och 199 delbara med både 3 och 7, dvs mängden av tal mellan 1 och 199 som är delbar med $3 \cdot 7 = 21$. På motsvarande sätt fås att $A \cap C$ och $B \cap C$ är mängden av heltal mellan 1 och 199 delbara med $3 \cdot 11 = 33$ respektive $7 \cdot 11 = 77$. Antalet tal som är delbara med d och ligger mellan 1 och n är heltalsdelen av n/d vilket skrivs som $\lfloor n/d \rfloor$. Genom att tillämpa divisionsalgoritmen så får vi att

$$\begin{aligned}
|A| &= \lfloor \frac{199}{3} \rfloor = \lfloor 66 + \frac{2}{3} \rfloor = 66, & |B| &= \lfloor \frac{199}{7} \rfloor = \lfloor 28 + \frac{3}{7} \rfloor = 28, \\
|C| &= \lfloor \frac{199}{11} \rfloor = \lfloor 18 + \frac{1}{11} \rfloor = 18, & |A \cap B| &= \lfloor \frac{199}{21} \rfloor = \lfloor 9 + \frac{10}{21} \rfloor = 9, \\
|A \cap C| &= \lfloor \frac{199}{33} \rfloor = \lfloor 6 + \frac{1}{33} \rfloor = 6, & |B \cap C| &= \lfloor \frac{199}{77} \rfloor = \lfloor 2 + \frac{47}{77} \rfloor = 2.
\end{aligned}$$

Vi ser också att $A \cap B \cap C$ är mängden av heltal mellan 1 och 199 som är delbara med såväl 3, 7 samt 11, dvs delbar med $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$. Eftersom $231 > 199$ så är mängden tom. Vi får från (*) att

$$|A \cup B \cup C| = 66 + 28 + 18 - 9 - 6 - 2 + 0 = 95.$$

Detta ger oss att antalet tal mellan 1 och 199 som *inte* är delbara med $3, 7$ eller 11 är $199 - 95 = 104$.