Stockholms Universitet
Institutionen för Data och Systemvetenskap
Johan Andersson

Diskret Matematik
Exempeltentamen
2012-03-13

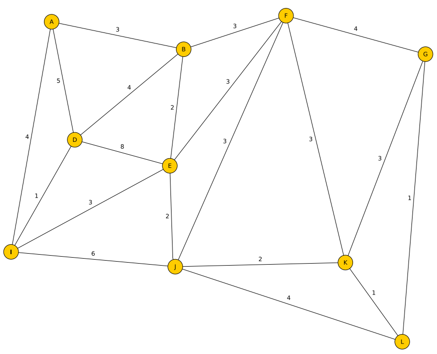
Ledningar och kortfattade svar till Exempeltentamen

Obs! Dessa svar skulle inte ge full poäng på en riktig tentamen

För fullständiga lösningsförlag så hänvisas till lösningsförslagen till Inlämnuingsuppgift Omgång 1, Omgång 2, respektive Omgång 3 som ligger på kurshemsidan

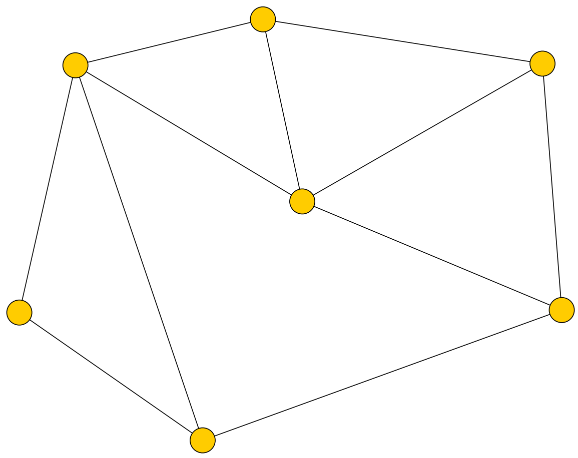
Exempeltentamen gicks igenom på repetitionslektionen Måndagen innan Tentamen 16:e Mars 2012.

1. Skriv talet
   (a) 37 på binär form (med basen 2). **Svar:** $(100101)_2$.
   (b) $(1013)_5$ på decimalform (med basen 10). **Svar:** 133.
   (c) $(303)_5$ i basen 4. **Svar:** $(1032)_4$.
2. Bestäm den minsta ickenegativa (principala) resten du får när du delar 3^{40} med 11. **Svar:** 1. **Ledning:** (använd exempelvis $3^{40} = (3^{10})^4$ och Fermats lilla sats. Den kan förstås lösas utan Fermats lilla sats också)
3. Bestäm en heltalslösning till ekvationen $44x + 57y = 1$. **Svar:** Exempelvis $x = -22$ och $y = 17$. **Ledning:** Använd Euklides algoritm,
4. Bestäm hur många fjortonstaviga ord du kan bilda ur ordet FJORTONSTAVIGA. (Behöver ej beräknas numeriskt.) **Svar:** $\frac{14!}{8}$.
5. Bestäm avståndet mellan I och G i nedanstående graf med hjälp av Dijkstra's algoritm. Var noggrann och skriv ut alla etiketter.



   Ledning: Se exempelvis lösningsförslaget på uppgift 8 på Inlämningsuppgift 3.
6. Låt $a_0 = 0$ och $a_n = 2a_{n-1} + 1$ för $n \geq 1$. Bevisa att $a_n = 2^n - 1$ för alla $n \geq 0$. **Ledning:** Se lösningsförslag för uppgift 1 på Inlämning 3.
7. Bestäm hur många ekvivalensrelationer R det finns på mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ där $1R2$. **Svar:** 5 st. **Ledning:** Varje ekvivalensrelation på en mängd motsvarar en partition på mängden. Det räcker alltså att räkna antalet partitioner av mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ där 1 och 2 ingår i samma mängd.

8. Lägg till ett minimalt antal extra bågar i nedanstående graf så att den innehåller en Eulerkrets och finn Eulerkretsen.



Ledning: Eftersom det finns 4 noder med udda gradtal behövs två bågar läggas till (Om en båge läggs till mellan två noder med udda gradtal så blir gradtalet i de två noderna jämnt).

9. Ge ett exempel på en Boolesk algebra med n element eller förklara varför den ej existerar om

   (a) $n = 3$. **Svar.** Finns ej, eftersom 3 inte är en potens av 2.

   (b) $n = 4$. **Svar.** Exempel B_2.

10. Rita upp grafen som hör till förbindelsematrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ledning: Rita upp 5 noder och numrera dem mellan 1 och 5. Om det finns en etta på platsen (i, j) i matrisen A skall det finnas en båge mellan nod i och nod j.

   (a) Beskriv vad siffran på plats (i, j) i matrisen A^4 betyder i termer av promenader i grafen. **Svar.** Siffran betyder antalet promenader av längd 4 mellan nod i och nod j.

   (b) Vilken siffra skall stå på plats $(3, 3)$ (3:e raden, 3:e kolonnen) i A^4? Vilka promenader motsvarar siffran? **Svar.** Siffran 3. Motsvarar promenaderna $3 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3$, $3 \to 2 \to 1 \to 2 \to 3$ och $3 \to 2 \to 4 \to 2 \to 3$.

11. Förklara varför

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

om $1 \le k \le n - 1$ genom att använda en kombinatorisk tolkning av binomialkoefficienterna.

Ledning: Om vi väljer k element ur en mängd med n element så har vi även entydigt bestämt vilka element som vi inte valt (dessa är $n - k$ element).